www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Institut National Polytechnique de Lorraine

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE ET DE PROSPECTION MINIERE

NANCY

- Session 1989

Epreuve de MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction. Aucun résultat non clairement justifié ne sera pris en compte. A condition de signaler explicitement qu'on n'a pu le démontrer, on peut utiliser un résultat du texte pour traiter la suite.

LES DEUX PROBLEMES SONT INDEPENDANTS.

PREMIER PROBLEME

On considère n variables aléatoires réelles X_i, ($n \geq 3$, $i = 1, 2, ..., n$) à valeurs non négatives, définies sur un même espace probabilisé Ω, et indépendantes. On suppose que la probabilité de tout événement faisant intervenir les X_i est la même que celle de tout autre événement déduit du précédent par une permutation quelconque opérée sur les X_i. Pour tout événement E, on désigne par $\overline{E}$ son contraire, et par P(E) sa probabilité. N est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

On considère, pour $i = 1, 2, ..., n$, les n événements A_i définis par

$A_i = (X_i \leq \sum X_j)$ avec $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$. On pose $P(A_1) = r$

Enfin, on appelle U la variable aléatoire égale au nombre des événements A_i réalisés.

- I -

a) Pour $i \neq j$, établir que $P(A_i) = P(A_j)$ et que $\overline{A_i} \subset A_j$. Que peut-on dire de $\overline{A_i} \cap \overline{A_j}$ et de $A_i \cup A_j$?

b) Montrer que, pour i, j, i', deux à deux distincts, on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_{i'} \cap A_j)$ et que, pour i, j, i', j', deux à deux distincts, on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_{i'} \cap A_{j'})$.

- II -

On pose, pour $k \in N$ et $1 \leq k \leq n-1$, $E_k = \left[\bigcap_{h=1}^{k} \overline{A}_h\right] \cap \left[\bigcap_{h=k+1}^{n} A_h\right]$

a) Calculer $P(E_k)$

b) Déterminer la loi de U. Exprimer les résultats en fonction de r. Montrer que $1 - \frac{1}{n} \leq r \leq 1$.

- III -

On suppose $k \in N$ et $2 \leq k \leq n$.

a) En fonction de r, calculer $P(A_1 \cap A_2)$ puis $P\left[\bigcap_{h=1}^{k} A_h\right]$

b) Montrer que $r = 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les A_i soient indépendants.

- IV -

On suppose les X_i de même loi et telles que $0 < P(X_i = 0) < 1$. Montrer qu'alors les A_i ne sont pas indépendants.

- V -

On prend $n = 3$, et on suppose les X_i à valeurs dans N et de même loi définie par

$P(X_i = w) = p q^w$ ($0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $w \in N$).

Déterminer, en fonction de p, la loi de $X_1 + X_2$, la valeur de $P(A_1)$, et la loi de U.

A_1, A_2, A_3 sont-ils indépendants ?

T.S.V.P

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout le problème, a est un réel fixe strictement positif, m est un réel positif ou nul, x une variable réelle vérifiant $0 \leq x \leq a$, e est la base des logarithmes népériens.

- I - On pose $A_m = \int_0^a e^{-mt}\,dt$, $B_m = \int_x^a (t-x)^2 e^{-m(t-x)}\,dt$, $C_m = \int_0^a e^{t-m|t-x|}\,dt$.

I - 1°. Calculer ces intégrales.

I - 2°. Pour x fixé non nul, B_m et C_m apparaissent alors comme des fonctions de m définies pour $0 \leq m$. Etudier :

a) La continuité de B_m à droite en m = 0.

b) La continuité de C_m en m = 1, et à droite en m = 0.

I - 3°. Chercher lorsque m devient infini positif les limites de $\frac{B_m}{A_m}$ et $\frac{C_m}{A_m}$.

- II - On considère une fonction φ d'une variable réelle, définie, continue, strictement positive sur [0, a[et strictement décroissante sur [0, a]. Pour X et Y réels tels que $0 \leq X \leq Y \leq a$,

On pose $I_m(X, Y) = \int_X^Y [\varphi(t)]^m\,dt$.

II - 1°. α_1 et α étant deux réels vérifiant $0 < \alpha_1 < \alpha < a$, montrer que

$$I_m(\alpha, a) < a\,[\varphi(\alpha)]^m \text{ et que } I_m(0, \alpha) > \alpha_1 [\varphi(\alpha_1)]^m.$$

En déduire les limites, lorsque m devient infini positif de

$$\frac{I_m(\alpha, a)}{I_m(0, \alpha)}\ , \text{ de } \frac{I_m(0, a)}{I_m(0, \alpha)} \text{ et enfin pour } 0 \leq x < a \text{ de } \frac{\int_x^a [\varphi(t-x)]^m dt}{I_m(0, \alpha)}$$

II - 2°. On considère une fonction f d'une variable réelle, continue sur [0, a]. On appelle M la borne supérieure de $|f(t)|$ pour $t \in [0, a]$. Etant donné un nombre strictement positif ε, montrer qu'on peut trouver un réel λ vérifiant $0 < \lambda < a$, tel que pour tout t de $[0, \lambda]$, on ait $|f(t) - f(0)| < 1/2\,\varepsilon$.

On pose alors $E_m = \dfrac{\int_0^a f(t)\,[\varphi(t)]^m\,dt}{\int_0^a [\varphi(t)]^m\,dt}$. Montrer que $\lim_{m \to +\infty} E_m = f(0)$.

- III - **La fonction f vérifiant les conditions du II-2°., on considère dans cette partie une fonction φ définie sur [-a, +a], paire et vérifiant sur [0, a] les propriétés indiquées dans le préambule du II :**

On pose $F_m(x) = \dfrac{\int_0^a f(t)[\varphi(t-x)]^m\,dt}{2\int_0^a [\varphi(t)]^m\,dt}$.

III-1°. Montrer que, pour $x \in]0, a[$, $\lim_{m \to +\infty} F_m(x) = f(x)$. Trouver $\lim_{m \to +\infty} F_m(0)$

III-2°. k étant donné positif fixe, étudier $\lim_{m \to +\infty} \dfrac{\int_0^a [\varphi(t-x)]^{m+k}\,dt}{2\int_0^a [\varphi(t)]^m\,dt}$

III - 3°. Calculer $F_m(x)$ lorsque $a = 1$, $f(t) = t$, $\varphi(t) = 1 - |t|$. Vérifier dans ce cas particulier les résultats du III - 1°.

III - 4°. En appliquant III - 1°., peut-on retrouver les résultats du I - 3°., sans calculer les intégrales ?

---oOOo---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail